TÍNH KHẢ VI CỦA HÀM KHOẢNG CÁCH

Phùng Xuân Lễ*
Trường Đại học Phú Yên
Ngày nhận bài: 12/04/2021; Ngày nhận đăng: 28/05/2021

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số kết quả liên quan đến tính khả vi của hàm khoảng cách. Các kết quả này đã được đưa ra bởi Clarke, F. H., Stern R. J., và Wolenski, P. R. Tuy nhiên, hầu hết chứng minh vắn tắt hoặc không chứng minh. Ở đây, chúng tôi trình bày với chứng minh chặt chẽ và chi tiết.

Từ khóa: *hàm khoảng cách, không gian Hilbert, đạo hàm Gateaux, đạo hàm Frechet, giải tích không trơn.*

1. Đặt vấn đề

Giải tích không trơn là một trong những nhánh của giải tích mà đối tượng của nó là những hàm và tập không trơn theo nghĩa cổ điển. Như đã biết, phép tính biến phân cổ điển ra đời rất lâu nhằm mục đích giải quyết những bài toán xuất hiện trong cơ học Newton và trong hình học. Nó chủ yếu xem xét những hàm hoặc tập trơn. Theo sự phát triển của khoa học, kỹ thuật và kinh tế, ta gặp nhiều bài toán mà dữ kiện của nó không còn tính trơn (theo nghĩa cổ điển) nữa. Vì thế, phép tính biến phân cổ điển không còn áp dụng được cho những bài toán đó. Giải tích không trơn ra đời và phát triển nhằm đáp ứng yêu cầu nghiên cứu những bài toán biến phân với dữ kiện không trơn.

Hàm khoảng cách là một đối tượng quan trọng trong giải tích để nghiên cứu đa tạp giải tích. Tuy nhiên, một điều không may mắn, nó thường là không khả vi, ngay cả đối với những tập đơn giản. Do vậy, vấn đề đặt ra là đối với những lớp tập nào thì hàm khoảng cách khả vi (trên một tập nào đó)? Những năm gần đây giải tích không trơn đóng vai trò then chốt trong giải tích hàm, lý thuyết tối ưu, lý thuyết điều khiển, phương trình vi phân,…

Năm 1979, Rockafellar đã xem xét lớp những tập trên không gian hữu hạn chiều thỏa mãn điều kiện yếu hơn là hàm khoảng cách khả vi trên một lân cận của tập ấy được gọi là tập trơn proximal. Lớp các tập này rộng hơn, có nhiều tính chất thú vị và có nhiều ứng dụng trong tối ưu và điều khiển. Năm 1995, Clarke và đồng sự mở rộng nghiên cứu lớp tập này và đã thu được những đặc trưng quan trọng.

2. Các khái niệm và định lý

2.1. Một số khái niệm về pháp tuyến proximal và dưới vi phân proximal

Trong phần này, tác giả trình bày các kiến thức cơ sở liên quan đến chứng minh các phần sau, chúng ta có thể tìm thấy trong (Clarke, Stern, & Wolenski 1995; Đỗ Văn Lưu, 1999).

Định nghĩa 2.1.1. Cho H là không gian Hilbert thực, X là tập con đóng của H. Khoảng cách từ phần $x \in H$ đến X được định nghĩa như sau:

* Email: phungxuanledt@gmail.com

$$d_X(u) = \inf\{\|u - x\| : x \in X\}.$$

Định nghĩa 2.1.2 (Clarke, Stern, & Wolenski 1995). Tập gồm các phần tử trong X thỏa $\|u - x\| := d_X(u)$ được ký hiệu $proj_X(u)$ và $proj_X(u) := \{x \in X : \|u - x\| = d_X(u)\}$.

Định nghĩa 2.1.3. Nón pháp tuyến proximal của tập X tại x ký hiệu $N_X^P(x)$ được định nghĩa như sau:

$$N_X^P(x) := \{\varsigma \in H : \varsigma = t(u - x),\ t \geq 0,\ x \in proj_X(u)\}.$$

Định lý 2.1.4 (Clarke, Stern, & Wolenski, 1995). *Cho X là tập con khác rỗng của H và $u \in H$, $x \in X$. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

i) $x \in proj_X(u)$;

ii) $x \in proj_X(x + t(u - x)),\ \forall t \in [0, 1]$;

iii) $d_X(x + t(u - x)) = t\|u - x\|,\ \forall t \in [0, 1]$;

iv) $\langle u - x, x' - x\rangle \leq \frac{1}{2}\|x' - x\|^2,\ \forall x' \in X$.

Định nghĩa 2.1.5. $\varsigma \in H$ được gọi là dưới vi phân (P– subgradient) của f tại $x \in U \subset H$ nếu $(\varsigma, -1) \in N_{epi\, f}^P(x, f(x))$.

Tập mọi véctơ như thế, được gọi là dưới vi phân của f tại x, ký hiệu $\partial_P f(x)$.

Tương tự P– vi phân trên của hàm f tại x, ký hiệu $\partial^P f(x)$.

Định nghĩa 2.1.6. Nón chuẩn giới hạn (L– normal cone) của X tại $x \in X$ được định nghĩa như sau:

$$N_X^L(x) := \{\varsigma : \varsigma_i \xrightarrow{w} \varsigma,\ \varsigma_i \in N_X^P(x_i),\ x_i \to x\}.$$

Ký hiệu, $\xrightarrow{w}$ chỉ sự hội tụ yếu.

2.2. Dưới vi phân và đặc trưng khả vi của hàm khoảng cách

Phần này, tác giả trình bày một số tính chất quan trọng về dưới vi phân và đặc trưng khả vi của hàm khoảng cách.

Định lý 2.2.1. *Giả sử $u \notin X$ sao cho $proj_X(u) \neq \varnothing$. Khi đó, ta có*

i) $\partial^P d_X(u) \neq \varnothing$

ii) Nếu $\partial^P d_X(u) \neq \varnothing$ *thì* d_X *Frechet tại* u *và*

$$\partial_P d_X(u) = \partial^P d_X(u) = \{d_X'(u)\} = \left\{\frac{u - x}{d_X(u)}\right\},\ \textit{trong đó}\ proj_X(u) = \{x\}.$$

Chứng minh. i) Giả sử $x \in proj_X(u)$. Xét hàm $f_x(w) = \|w - x\|$ là khả vi liên tục trên hình cầu $u+\rho B$ với $0<\rho<d_X(u)$. Khi đó, tồn tại số $K>0$ sao cho với $x\in X$ ánh xạ

$$w\to f'_x(w):=\frac{w-x}{\|w-x\|},$$

là Lipschitz với hạng K trên $u+\rho B$. Theo định lý giá trị trung bình, với mỗi $w\in u+\rho B$, ta có

$$f_x(w)-f_x(u)=\langle f'_x(q), w-u\rangle.$$

Với mọi $q\in(u,w)$, ta có

$$f_x(w)-f_x(u)=\langle f'_x(q), w-u\rangle$$

$$\Rightarrow f_x(w)-f_x(u)=\langle f'_x(q)-f_x(u)+f_x(u), w-u\rangle$$

$$\Rightarrow f_x(w)-f_x(u)=\langle f_x(u), w-u\rangle+\langle f'_x(q)-f_x(u), w-u\rangle.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, với mỗi u và w như thế ta có

$$f_x(w)-f_x(u)=\langle f_x(u), w-u\rangle+K\|w-u\|^2.$$

Do đó, với $w\in u+\rho B$ suy ra

$$d_X(w)-d_X(u)-K\|w-u\|^2\leq\langle f'_x(u), w-u\rangle, \qquad (1)$$

và

$$f'_x(u)\in\partial^P d_X(u).$$

ii) Giả sử $\varsigma\in\partial_P d_X(x)$. Khi đó, tồn tại các số dương σ và γ sao cho

$$d_X(w)-d_X(u)+\sigma\|w-u\|^2\geq\langle\varsigma, w-u\rangle, \forall w\in u+\gamma B \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $\varsigma=f'_x(u)$ và nó là đạo hàm Frechet của d_X tại u. Khi đó,

$$\partial_P d_X(u)=\partial^P d_X(u)=\{d'_X(u)\}=\left\{\frac{u-x}{d_X(u)}\right\}, \textit{ trong đó } proj_X(u)=\{x\}.$$

Bổ đề 2.2.2 (Clarke, Stern, & Wolenski, 1995).

i) Giả sử $x\in proj_X(x+\delta\varsigma)$, *ở đây* $\delta>0$ *và* $\|\varsigma\|=1$ *thì*

$$0\leq r\leq s<\delta\Rightarrow x+r\varsigma\in proj_X(x+s\varsigma).$$

ii) Giả sử $\varsigma\in N^P_{X_r}(u)$ *và* $\|\varsigma\|=1$. *Khi đó, tồn tại* $\delta>0$ *sao cho*

$$d_X(u+\delta\varsigma)=r+\delta$$

Chứng minh. i) Giả sử $0<r<s<\delta$. Vì $x\in proj_X(x+\delta\varsigma)$ nên với mọi $y\in X$, ta có

$$\begin{aligned}\|x+s\varsigma-y\| &= \|x+\delta\varsigma-y+s\varsigma-\delta\varsigma\|\\ &\geq \|x+\delta\varsigma-y\|-\|\delta\varsigma-s\varsigma\|\\ &= \|x+\delta\varsigma-y\| - \delta - s\\ &> s.\end{aligned}$$

Suy ra

$$x \in proj_X\ x+s\varsigma \text{ và } d_X\ x+s\varsigma = s.$$

Giả sử $z \in X\ r := u \in H: d_X\ u \leq r$. Khi đó, tồn tại dãy z_n trong X sao cho

$$d_X\ z = \lim_{n\to\infty}\|z-z_n\| \leq r.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\|x+s\varsigma-z\| &\geq \|x+s\varsigma-z_n\|-\|z-z_n\|\\ &\geq s-\|x-z_n\|,\end{aligned}$$

cho $n \to \infty$ ta được $\|x+s\varsigma-z\| \geq s-r.$ Do đó, $d_{X\,r}\ x+s\varsigma \geq s-r.$

Vì $x+r\varsigma \in X\ r$ nên $x+r\varsigma \in proj_{X\,r}\ x+s\varsigma$.

ii) Với $\delta > 0$ đủ nhỏ, đặt $z = u+\delta\varsigma$.

Do đó,

$$\begin{aligned}&d_{X\,r}\ z = \|z-u\| = \delta\\ &\Rightarrow d_{X\,r}\ z \leq \|z-u\| + d_{X\,r}\ u\\ &\qquad < \delta + r.\end{aligned}$$

Xét $x \in X \Rightarrow d_X\ x = 0.$ Khi đó, tồn tại $y \in [x, z]$ sao cho $d_X\ y = r,$ tức là $y \in X\ r$. Mặt khác, $\|x-z\| = \|y-x\| + \|z-y\| \geq r+\delta.$ Vì $\|y-x\| \geq r$ và $\|z-y\| \geq \delta$ nên $d_X\ z \geq r+\delta.$ Vậy $d_X\ z = r+\delta.$

Xét $u \in H$ sao cho $d_X\ u > 0$ và giả sử $\varsigma \in \partial_P d_X\ u$.

Khi đó, $P-$ dưới vi phân tồn tại các số dương σ, γ sao cho

$$\begin{aligned}&d_X\ \mathrm{w} - d_X\ u + \sigma\|\mathrm{w}-u\|^2 \geq \langle \varsigma, \mathrm{w}-u\rangle,\ \forall \mathrm{w} \in u+\gamma B\\ &\Rightarrow \sigma\|\mathrm{w}-u\|^2 \geq \langle \varsigma, \mathrm{w}-u\rangle,\ \forall \mathrm{w} \in\ u+\gamma d\ B\ \cap X\ r\ .\end{aligned}$$

Do đó, $\varsigma \in N^P_{X\,r}\ u$. Vì $\|\varsigma\| = 1$ nên $\partial_P d_X\ u \subseteq N^P_{X\,r}\ u \cap \varsigma \in H: \|\varsigma\| = 1$.

Định lý sau chứng tỏ bao hàm thức ngược lại đúng.

Định lý 2.2.3. *Nếu* $d_X\ u = r > 0$ *thì* $\partial_P d_X\ u = N^P_{X\,r}\ u \cap \varsigma \in H: \|\varsigma\| = 1$.

Chứng minh. Giả sử $\varsigma \in N^P_{X\,r}\ u$ với $\|\varsigma\| = 1.$ Theo bổ đề 2.2.2, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$d_X(u+\delta\varsigma) = r+\delta \Rightarrow \{y\in H: \|y-u-\delta\varsigma\| < r+\delta\}\cap X=\varnothing$$

Do d_X là Lipschitz hạng 1, với mọi u' gần u, ta có

$$\begin{aligned} & d_X(u+\delta\varsigma)-d_X(u') \le \|u'-u-\delta\varsigma\| \\ \Leftrightarrow\, & d_X(u') \ge r+\delta-\|u'-u-\delta\varsigma\|. \end{aligned} \quad (3)$$

Để ý rằng $\varsigma\in\partial^P d_X(u)$ khi và chỉ khi tồn tại $\sigma>0$ sao cho với mọi u' gần u ta có

$$\begin{aligned} & d_X(u')-\langle\varsigma, u'-u\rangle+\sigma\|u'-u\|^2 \ge d_X(u)=r \\ \Leftrightarrow\, & d_X(u') \ge \langle\varsigma, u'-u\rangle-\sigma\|u'-u\|^2+r. \end{aligned} \quad (4)$$

Do đó,

$$\begin{aligned} & r+\delta-\|u'-u-\delta\varsigma\| \ge \langle\varsigma, u'-u\rangle-\sigma\|u'-u\|^2 \ge d_X(u)+r \\ \Leftrightarrow\, & \delta+\sigma\|u'-u\|^2 \ge \langle\varsigma, u'-u\rangle+\|u'-u-\delta\varsigma\|,\ \forall u' \text{ gần } u. \end{aligned} \quad (5)$$

Đặt

$$\begin{aligned} & a:=\|u'-u\| \\ & b:=\|u'-u-\delta\varsigma\| \\ & \theta:=\arccos\left(\frac{\langle\varsigma, u'-u\rangle}{\|u'-u\|}\right). \end{aligned}$$

Khi đó, (5) trở thành

$$\delta+\sigma a^2 \ge a\cos(\theta)+b. \quad (6)$$

Sử dụng định lý cosin, ta có

$$b^2=a^2+\delta^2-2a\delta\cos(\theta).$$

Suy ra

$$a\cos(\theta)=\frac{a^2+\delta^2-b^2}{2\delta}. \quad (7)$$

Trước hết xét trường hợp $\delta<b$. Từ (7), ta có

$$\begin{aligned} a\cos(\theta) &= \frac{a^2}{2\delta}+\frac{(\delta-b)(\delta+b)}{2\delta} \\ &\le \frac{a^2}{2\delta}+\delta-b. \end{aligned}$$

Do đó, đúng với $\sigma=\dfrac{1}{2\delta}$.

Bây giờ giả sử $\delta>b$. Từ (7), suy ra $\cos(\theta)>0$ và

$$2a\delta\cos\theta = a^2 + \delta^2 - b^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\delta}{\delta + b} a\cos\theta = \frac{a^2}{\delta + b} + \delta - b.$$

Vì
$$\frac{2\delta}{\delta + b} \geq 1$$

nên ta được

$$\begin{aligned} a\cos\theta + b &\leq \frac{2\delta}{\delta + b} a\cos\theta + b \\ &= \frac{a^2}{\delta + b} + \delta \\ &\leq \frac{a^2}{\delta} + \delta \end{aligned}$$

Do đó, 6 đúng với $\sigma = \frac{1}{\delta}$.

Định lý sau cho ta mối liên hệ giữa tính khả vi của hàm khoảng cách và sự tồn tại điểm gần nhất.

Định lý 2.2.4. *i) Giả sử* $u \notin X$ *sao cho* $proj_X\, u \neq \varnothing$ *Nếu* d_X *là khả vi Gateaux tại* u *thì* $\|d_X'\, u\| = 1.$

ii) Nếu $u \notin X$ *và* d_X *là khả vi liên tục tại* u *thì* u *đạt được duy nhất điểm gần nhất* $x \in X$ *và*

$$d_X'\, u = \frac{u - x}{d_X\, u}.$$

Chứng minh. i) Giả sử $x \in X$ là điểm gần nhất của u.

Ta có
$$x \in proj_X\, u \Leftrightarrow d_X[x + t'\, u - x] = t'\|u - x\|, \forall t' \in [0, 1].$$

Đặt $t = 1 - t'$ thì $t \in [0, 1]$ và ta được
$$x \in proj_X\, u \Leftrightarrow d_X[x + t\, x - u] = t\|x - u\|, \forall t' \in [0, 1].$$

Đặt $v = x - u$, ta được $d_X\, u + tv = 1 - t\, d_X\, u$.

Do đó,

$$
\begin{aligned}
d'_X(u,v) &= \lim_{t\to 0}\frac{d_X(u+tv)-d_X(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(1-t)\,d_X(u)-d_X(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{-t\,d_X(u)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0} d_X(u)\\
&= -\|x-u\|\\
&= \langle d'_X(u), x-u\rangle .
\end{aligned}
$$

Mặt khác, vì hàm khoảng cách là Lipschitz có hạng bằng 1 nên $\|d'_X(u)\|\le 1$.

Từ bất đẳng thức Cauchy-Schwart suy ra $\|d'_X(u)\|\ge 1$. Vậy $\|d'_X(u)\|=1$.

ii) Vì d_X là khả vi liên tục tại u suy ra $\partial_L d_X(u) = \{d'_X(u)\}$.

Do đó, $d'_X(u)$ là giới hạn yếu của dãy ς_i sao cho $\partial_L d_X(u_i) = \{\varsigma_i\}$ với $u_i \to u$.

Từ định lý 2.1.2, ta có $\varsigma_i = d'_X(u_i)$ và $\varsigma_i = \dfrac{u_i - x_i}{d_X(u_i)}$, trong đó $proj_X(u_i) = \{x_i\}$.

Vì thế,

$$x = u - d_X(u)\,d'_X(u) = \lim_{i\to+\infty} x_i \text{ và } d'_X(u) = \frac{u-x}{d_X(u)}.$$

Vì chuẩn của đại lượng trên bằng 1 và $x \in X$ nên $x \in proj_X(u)$.

Bây giờ ta chứng minh x là phần tử duy nhất trong $proj_X(u)$.

Giả sử $x' \in proj_X(u)$. Ký hiệu,

$$u_\delta = u - \delta\frac{u-u'}{d_X(u)}$$

thì

$$x' \in proj_X(u), \forall \delta \in (0, d_X(u)).$$

Do đó,

$$\frac{u-x'}{d_X(u)} \in N^P_{N(d_X(u)-\delta)}(u_\delta).$$

Từ định lý 2.1.4, ta có

$$\left\{\frac{u - x'}{d_X\ u}\right\} = \partial_P d_X\ u_\delta = d_X'\ u_\delta\ .$$

Cho $\delta \to \infty$ ta được

$$d_X'\ u = \frac{u - x'}{d_X\ u},$$

vậy

$$x = x'.$$

Như đã biết trong giải tích hàm, nếu một tập lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thì hàm khoảng cách khả vi liên tục trên toàn không gian và mỗi điểm thuộc không gian đều tồn tại duy nhất phần tử gần nhất. Tuy nhiên, tính chất đẹp này không còn đúng đối với một tập đóng, không lồi. Trong nhiều ứng dụng, đối với những tập đóng, không lồi, đòi hỏi một tính chất yếu hơn gọi là trơn proximal.

Định nghĩa 2.2.5. Tập đóng $X \subset H$ được gọi là trơn proximal nếu tồn tại $r > 0$ sao cho hàm khoảng cách $d_X\ u$ là khả vi liên tục trên $U\ r$ có dạng

$$U\ r = u \in H:\ 0 < d_X\ u < r\ .$$

Ví dụ 2.2.6. Cho $r > 0$ và ký hiệu $Y\ r = u \in H: d_X\ u \geq r$. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:

i) $d_X\ u$ là khả vi liên tục trên $U\ r$;

ii) $proj_X\ u \neq \varnothing\ \forall u \in U\ r$ và tồn tại đạo hàm Gateaux $d_X'\ u$;

iii) $proj_X\ u \neq \varnothing\ \forall u \in U\ r$ và với mỗi $r' \in 0, r$ ta có

$$d_X\ u + d_{Y r'}\ u = r', \forall u \in U\ r'\ ;$$

iv) Với mọi $r' \in 0, r$ và $u \in H$ sao cho $d_X\ u = r'$, ta có $N^P_{X r'}\ u \neq 0$;

v) $\partial_P d_X\ u \neq \varnothing\ \forall u \in U\ r$.

3. Kết luận

Bài báo này, đã thực hiện được các vấn đề sau:

Chứng minh chi tiết các kết quả, định lý 2.2.1, bổ đề 2.2.2, định lý 2.2.3, định lý 2.2.4.

Định lý 2.2.1 và bổ đề 2.2.2, đưa ra một số tính chất quan trọng của nón chuẩn proximal.

Định lý 2.2.3, chứng minh đẳng thức quan trọng

$$\partial_P d_X\ u = N^P_{X r}\ u \cap \varsigma \in H: \|\varsigma\| = 1\ .$$

Định lý 2.2.4, chứng minh mối liên hệ giữa tính khả vi của hàm khoảng cách và sự tồn tại điểm gần nhất❑

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Clarke, F. H., Stern R. J., & Wolenski, P. R. (1995). *Proximal Smoothness and the* $\_C^2$ *Property*. J. Convex Anal. 2, no.1/2, pp.117-144.

Đỗ Văn Lưu. (1999). *Giải tích Lipschitz,* NXB Khoa học và Kỹ thuật.

Hoang Tuy. (1997). *Convex Analyis and Global Optimization*. Kluwer Academic Publishers.

Rockafellar, T. R. (1972). *Convex Analyis.* Springer, Berlin.

Rockafellar, T. R. (1998). *Variational Analyis.* Springer, Berlin.

Differentiability of the Distance Functions

Phu Yen University
Email: phungxuanledt@gmail.com
Received: April 12, 2021; Accepted: May 28, 2021

Abstract

In this paper, we would like to present some findings related to differentiability of the distance functions. These findings have been reported by, Clarke, F. H., Stern R. J., and Wolenski, P. R. However, most of them have not been proved in full details. In this article, they are presented with full details and proofs.

Keywords: *distance function, Hilbert space, Gateaux derivatives, Frechet derivatives, nonsmooth analysis.*